$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{N}$ celui des entiers positifs ou nul. On considère le plan métrique $\mathbb{R}^2$, muni du repère orthonormé (O, Ox, Oy) où O est l'origine, Ox l'axe des abcisses et Oy celui des ordonnées. Soit E l'ensemble des fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{J}$ de $\mathbb{R}$ et dont la dérivée troisième est définie sur $\mathcal{J}$.

On rappelle que, ($n \in \mathbb{N}$), la notation "$o(x^n)$" désigne toute fonction de la forme $x^n \varepsilon(x)$ où $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \varepsilon(x) = 0$; et que si f et g sont deux fonctions de E (avec : $g(x) \neq 0$ pour $0 < |x - x_o| < \varepsilon$ $x \neq x_o$ x_o étant un réel et ε un réel positif ne dépendant pas de x), la notation "(f ~ g au voisinage de x_o)" signifie que $\lim_{\substack{x \to x_o \\ x \neq x_o}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Première partie

On suppose dans cette première partie que f est une fonction de E telle que : $o \in \mathcal{J}$

$f(o) = o$; $\exists \eta \in \mathbb{R}$; $\eta > o$ $\begin{cases} o < x < \eta & f'(x) > o \\ -\eta < x < o & f'(x) < o \end{cases}$; $f''(o) \neq o$ $f'''(o) \neq o$

1°) Ecrire le développement limité de f, au 3 ème ordre, au voisinage de o en fonction de f"(o), f'"(o) et $o(x^3)$.

2°) Soit (c) la courbe d'équation $y = f(x)$ dans $\mathbb{R}^2$ et D_λ la droite d'équation $y = \lambda$, λ étant un nombre réel positif. Montrer que si D_λ coupe (c) en un point M_1 d'abcisse x_1, telle que $-\varepsilon < x_1 < o$, elle recoupe (c) en un point M_2 d'abcisse $x_2 > o$ et que l'on peut considérer que λ et x_2 sont des fonctions de x_1, au voisinage de o, continues en $x_1 = o$.

3°) Ecire le développement limité au 3ème ordre de λ, fonction de x_1, au voisinage de o.

4°) En déduire que $x_1 \backsim (- x_2)$ puis que $o(x_1^3) = o(x_2^3)$; écrire alors le développement limité au 3ème ordre de $x_1^2 - x_2^2$, fonction de x_1, au voisinage de o.

5°) Soit I le milieu de M_1 M_2 et Δ_λ la droite qui passe par O et par I. Soit $m(\lambda)$ la pente de cette droite. Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to o} m(\lambda) = - \frac{3(y''(o))^2}{y'''(o)}$$

.../...

Deuxième partie

On adopte pour la suite la convention suivante : μ étant un paramètre réel, D_μ une droite d'équation $y - yo = m(\mu)\ (x - xo)$, xo et yo étant deux réels donnés, on dira que "la droite D_0 est la limite de la droite D_μ quand μ tend vers μ_0" dans les deux cas suivants :

ou bien : $\lim_{\mu \to \mu_0} m(\mu) = m_0$ et D_0 a pour équation $y - yo = m_0(x - x_0)$

ou bien : $\lim_{\mu \to \mu_0} |m(\mu)| = +\infty$ et D_0 a pour équation : $x = x_0$

1°) Soit f, une fonction de E telle que : $\begin{cases} f''(x) \neq 0 & \forall x \in J \\ f''(x) \text{ de signe constant sur } J. \end{cases}$

Soit (c) la courbe d'équation $y = f(x)$ et M un point de (c). Par un point M_1 d'abcisse x_1, voisin de M, on mène la droite D_{x1} parallèle à la tangente en M à (c).

Montrer que D_{x1} recoupe (c) en un point M_2 .

2°) Soit I le milieu de M_1 M_2 et Δ_{x1} la droite qui passe par M et par I.
Soit $m(x_1)$ la pente de cette droite :
Montrer que lorsque x_1 tend vers x, Δ_{x1} tend vers une droite Δ_x dont on écrira l'équation.

(On utilisera la première partie).

3°) Montrer que les courbes (c) telles que, quelque soit le point de M de (c), les droites Δ_x soient parallèles à une direction donnée, sont des paraboles. (On se ramènera pour chaque étape de l'intégration à une équation différentielle à variables séparées).

4°) Dans cette question, on se propose de chercher les courbes (c) telles que, quel que soit le point M de (c) les droites Δ_x passent par un point fixe.

a) Montrer que l'on ne change pas la nature du problème si on suppose que ce point est l'origine O.

b) On se place dans ce cas particulier. En remarquant que la dérivée de $xy' - y$ est xy'' , et en se ramenant pour chaque intégration à une équation à variables séparées, montrer que les courbes obtenues sont des coniques.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail